

руг горизонтальной оси симметрии в вертикальном магнитном поле с индукцией B . Найдите наибольшее значение тока в перемычке. Размеры рамки приведены на рисунке.

3. Конденсатор емкостью C_0 зарядили до напряжения U_0 . После этого конденсатор отсоединили от источника напряжения и отпустили его нижнюю пластину. Она начала падать и, пролетев расстояние h по вертикали, приобрела скорость v . Найдите емкость конденсатора C в этот момент, если масса пластины m , а ускорение свободного падения g .

4. Оболочку воздушного шара наполняют нагретым воздухом. Оцените количество теплоты, которое должно пойти на нагрев воздуха, чтобы воздушный шар мог поднять вас. Удельная теплоемкость воздуха при атмосферном давлении равна $1,0$ кДж/(кг · К).

5. Массивное колесо надето на согнутый стержень как на ось. Его ставят на наклонную доску так, что стержень упирается в нее. Колесо отпускают – оно стоит. Теперь вставляют другой стержень, с большей длиной от оси до доски. Отпущенное колесо скатывается по доске. Объясните демонстрируемое явление.

Вариант 3

1. На дне коробки стоит брусок массой M , на котором находится кубик массой m (рис. 4). Кубик привязан к правой

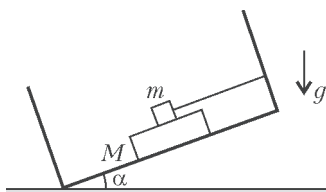


Рис. 4

стенке коробки нитью, параллельной дну. Коэффициент трения между бруском и дном равен μ , трения между бруском и кубиком нет. При каком угле наклона коробки α брусок начнет выскальзывать из под кубика?

2. При температуре T_0 тонкостенный стакан сечением S плавает в воде вверх дном, выступая из воды на высоту h_0 (рис. 5). Найдите начальный объем воздуха в стакане, если при повышении температуры до T стакан начал выступать из воды на высоту h . Изменением атмосферного давления и плотности воды пренебречь.

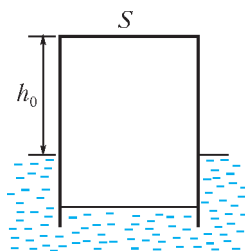


Рис. 5

3. Незаряженный конденсатор емкостью C подсоединен к параллельным проводам, сопротивление которых равно ρ на единицу длины, а расстояние между проводами H (рис. 6). Перпендикулярно плоскости проводов имеется магнитное поле с индукцией B . Равномерно движущаяся проводящая перемычка в некоторый момент времени начинает замыкать эти провода.

При какой скорости перемычки ток в контуре будет оставаться неизменным? Найдите величину этого тока, если в момент соприкосновения перемычки с проводами сопротивление контура было равно R_0 .

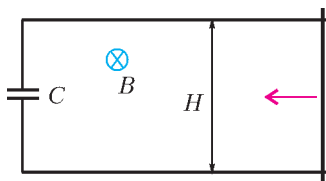


Рис. 6

4. Представьте, что вы плывете на лодке, в дне которой появилась пробоина. Оцените, при какой ее площади вы будете успевать отчерпывать набирающуюся воду литровой банкой.

5. Поплавки, один с воткнутым сверху тонким стержнем, второй – с толстым, плавают в солевом растворе, как

показано на рисунке 7. Если их опустить в пресную воду, то первый поплавок погружается почти на всю длину стержня, а второй остается практически на прежнем уровне погружения. Объясните наблюдаемое явление.

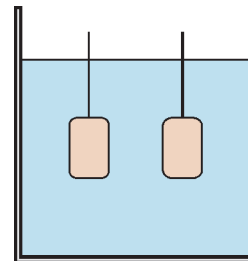


Рис. 7

Публикацию подготовили
И. Воробьев, Г. Меледин,
Г. Федотович, М. Блинов

Российский государственный педагогический университет им. А.И.Герцена

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Математический факультет

Вариант 1

1. Найдите область определения функции

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\log_3(2x^2 - 7x + 6)}.$$

2. Определите сумму всех трехзначных чисел, делящихся на 4.

3. Решите неравенство

$$\left| \frac{7-x}{5x-2} \right| \leq 3.$$

4. Два завода по плану должны были выпустить за месяц 360 станков. Первый завод выполнил план на 112%, а второй на 110%, вместе заводы выпустили за месяц 400 станков. Сколько станков сверх плана выпустил за месяц каждый завод в отдельности?

5. Определите координаты точек пересечения графиков функций $f(x) = 4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 6$ и $g(x) = 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}}$.

6. Определите в уравнении $x^2 - (2k+1)x + k^2 + 2 = 0$ значение k такое, что один из корней уравнения равен половине другого. Найдите эти корни.

7. Решите уравнение $\sqrt{3} \sin x = (1 - \cos x)$. Определите сумму корней этого уравнения из промежутка $[0; 2\pi]$.

8. Докажите, что в прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит пополам угол между медианой и высотой, проведенными из этого угла.

9. В тетраэдр, все ребра которого равны, вписан конус. Радиус основания конуса равен 5. Определите объем пирамиды.

Вариант 2

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^x \cdot 4^y = 32, \\ \lg(x-y)^2 - 2 \lg 2 = 0. \end{cases}$$

2. Решите неравенство $\log(64^{24} \sqrt{2^{x^2-40x}}) \geq 0$.

3. Решите уравнение $\sin x (\operatorname{ctg}^2 x - 1) = 0$. Укажите число корней на промежутке $[0; 2\pi]$.

4. Найдите все значения m , при которых неравенство $mx^2 - 4x + 3m + 1 > 0$ верно для всех действительных x .

5. Решите уравнение $4^{2x-1} - 3 \cdot 2^{1+|2x-1|} + 8 = 0$.
6. Решите неравенство $\sqrt{x+6} > \sqrt{2x-5} + \sqrt{x+1}$.
7. Какое двузначное число в 4 раза больше суммы своих цифр и в три раза больше произведения цифр?
8. В равнобедренной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны, а средняя линия равна m . Вычислите площадь трапеции.
9. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 12 и образует с основанием цилиндра угол 60° . Определите объем правильной треугольной призмы, вписанной в этот цилиндр.

Публикацию подготовили Г.Хамов, О.Корсакова

Российский государственный
технологический университет
им. К.Э.Циолковского (МАТИ)

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение $\sqrt{2x^2 - 13x + 12} = 2 - x$.
2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} |x + y| = 7, \\ x^2 - y^2 = 21. \end{cases}$$

3. Найдите сумму решений уравнения

$$1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + 2\sqrt{2} \sin x = 0$$

на отрезке $[-\pi; \pi]$.

4. Решите неравенство $\log_{1-x} 16 \leq 2$.
5. При каких значениях параметра a уравнение $7^t + (a+1)7^{-t} = 4$ имеет одно решение?
6. В четырехугольнике $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O , диагональ BD – это биссектриса угла ABC . Найдите отношение $OD : AD$, если около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность и $\angle ABC = 120^\circ$, $BC : AB = 1 : 4$.
7. Решите уравнение

$$3 \frac{\cos x - \cos^2 x}{\sin x} \cdot \frac{1}{3 \sin x} - 3 \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 3^{\sin x} + 3 \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{6}} = 3 \frac{1}{\sqrt{2} + \operatorname{ctg} x}$$

Вариант 2

(олимпиада-2006)

1. В книжный магазин привезли несколько одинаковых коробок с книгами, которые переложили на полки. Получилось девять полных полок и еще две книги осталось. Когда книги продали, привезли другое количество таких же коробок с книгами, которые переложили на полки. Получилось шесть полных полок, а на седьмой полке осталось место для одной книги. Сколько книг было в одной коробке?
2. Найдите углы треугольника α, β и γ , удовлетворяющие уравнению

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = \frac{3}{2}$$

3. При каких значениях b неравенство

$$x^2 + b \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

выполняется для всех допустимых значений x ?

4. Найдите наименьшее натуральное число n , при котором

уравнение

$$\frac{1}{x(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+4)} + \dots + \frac{1}{(x+2(n-1))(x+2n)} = \frac{1}{40}$$

разрешимо в целых числах.

5. Из районных команд была создана сборная команда города по гандболу из 7 игроков. Будем считать, что два спортсмена сборной знакомы друг с другом, если они ранее какое-то время выступали за одну команду. На первом тренировочном сборе выяснилось, что среди этих семи игроков двое знакомы с пятью игроками, двое знакомы с тремя игроками, один знаком с двумя игроками и двое знакомы с одним игроком. Найдите наибольшее количество спортсменов сборной города, любые два из которых не являются знакомыми.

6. Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC и пересекает его стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите отношение площади треугольника MBN к площади четырехугольника $AMNC$, если в $AMNC$ можно вписать окружность и его диагональ AN – диаметр этой окружности, а диагональ MC видна из центра описанной окружности под углом 120° .

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

Выберите правильный ответ

1. Тело падает без начальной скорости и достигает поверхности земли через 4 с. С какой высоты падало тело? Сопротивлением воздуха пренебречь.
1) 20 м; 2) 40 м; 3) 80 м; 4) 120 м; 5) 160 м.
2. За снегоходом на тросе тянут груз массой 500 кг. Найдите наибольшую силу натяжения троса, если максимальное ускорение снегохода 2 м/с^2 . Коэффициент трения груза о снег 0,1. Трос натянут горизонтально.
1) 500 Н; 2) 750 Н; 3) 1000 Н; 4) 1250 Н; 5) 1500 Н.
3. Два шара движутся навстречу друг другу по одной прямой. Кинетическая энергия первого шара 1 Дж. Какой должна быть кинетическая энергия второго шара, чтобы после удара шары остановились? Массы шаров 1 кг и 2 кг.
1) 0,25 Дж; 2) 0,5 Дж; 3) 1 Дж; 4) 2 Дж; 5) 2,5 Дж.
4. Один моль кислорода занимает объем 10 л, два моля азота занимают объем 20 л. Сравните давления газов, если их температуры одинаковы.
1) Давления одинаковы; 2) давление кислорода в 2 раза больше; 3) давление азота в 2 раза больше; 4) давление азота в 4 раза больше; 5) необходимо знать молярные массы газов.

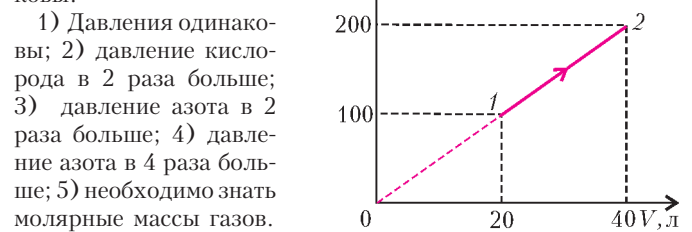


Рис. 1

5. Найдите работу, которую совершила постоянная масса идеального газа в процессе 1–2 (рис.1). На графике изображена зависимость давления газа от объема в этом процессе.
1) 1000 Дж; 2) 2000 Дж; 3) 3000 Дж; 4) 4000 Дж; 5) 8300 Дж.
6. Три резистора соединены последовательно. Общее напряжение на этом участке цепи 20 В, при этом напряжение на третьем резисторе 8 В. Найдите силу тока в цепи, если сопротивление первого резистора 4 Ом, второго резистора 6 Ом.