то окажется, что как в устойчивом, так и в неустойчивом положении это усилие прикладывать не нужно. Однако добиться того, чтобы ртуть при повышении температуры *сама опускалась* (в соответствии со второй ветвью параболы), невозможно. Находясь в «верхнем» положении равновесия, ртуть либо самопроизвольно выльется из трубки при повышении температуры, либо перейдет в положение устойчивого равновесия (для чего необходимо соединение с резервуаром жидкости, расположенным сверху).

# Размерности и... правило квантования Бора

***Г.БАКУНИН***

Ни для кого не секрет, что не любую концепцию современной физики можно корректно объяснить в школьных терминах. Иногда ситуация складывается еще сложнее – вычисления носят элементарный характер, однако понять мотивацию классиков совсем непросто. Так, например, обстоит дело с формулой Бора для квантования энергетических уровней в атоме водорода. Эта формула безусловно достойна того, чтобы обратить на нее внимание, поскольку позволяет установить связь между законами классической механики и квантовыми идеями. Более того, она является прекрасным примером того, как нетривиальный экспериментальный результат наглядно объясняется с помощью теории.

Еще в 1885 году швейцарский учитель физики И.Бальмер установил, что частоты (или длины волн) всех спектральных линий водорода в области видимого света (серия Бальмера) можно описать одной довольно простой формулой. Несколько позже в спектре водорода были обнаружены серии линий в области ультрафиолета (серия Лаймана) и в области инфракрасного излучения (серия Пашена и др. серии), описываемые аналогичными формулами. Оказалось, что для всех этих линий пригодна общая формула, называемая формулой Бальмера – Ридберга:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n_l^2} - \frac{1}{n_k^2}\right),$$

где $\lambda$ – длина волны излучения, $R = 1{,}097 \cdot 10^7$ м$^{-1}$ – постоянная Ридберга, а $n_l$ и $n_k$ – целые числа. Эта формула являлась в то время научной загадкой.

Включить в теоретическую модель квантовые (целые) числа, опираясь на «планетарную» модель Резерфорда, удалось Нильсу Бору в 1913 году. С формальной точки зрения, новые квантовые вычисления просты, так как в них используются только алгебраические преобразования базовых законов. Однако все не так просто с квантованием момента импульса, использованным Бором для объяснения формулы Бальмера – Ридберга. Выбор этой физической величины для квантования далеко не тривиален. Более того, момент импульса не изучают в школе (разве что факультативно), и во многом это создает методические трудности. Здесь мы рассмотрим, как гипотезу Бора можно обосновать с размерностной точки зрения, которая является полезной и при решении других задач.

Начнем с введения основных величин. Энергию излучаемых фотонов можно рассматривать как результат перехода электрона с одного энергетического уровня на другой:

$$\varepsilon_{ф} = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = E_{n_l} - E_{n_k},$$

где $h$ – постоянная Планка, $\nu$ – частота излучения, $c$ – скорость света, а $E_n$ – энергия $n$-го уровня. В нашем случае энергия $E$ электрона, движущегося по круговой орбите, складывается из кинетической энергии, равной $\frac{mv^2}{2}$, и потенциальной энергии притяжения электрона к ядру, равной $-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Это уравнение содержит две неизвестные величины: скорость электрона $v$ и радиус орбиты $r$. Одну из них можно исключить при помощи уравнения движения электрона по орбите

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Тогда получаем

$$E(r) = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}.$$

Сравним разность энергий электрона на орбитах с радиусами $r_l$ и $r_k$:

$$E_l - E_k = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_l} - \frac{1}{r_k}\right)$$

с энергией фотона, записанной с помощью формулы Бальмера – Ридберга:

$$\varepsilon_{ф} = h\nu = h\frac{c}{\lambda} = hcR\left(\frac{1}{n_l^2} - \frac{1}{n_k^2}\right).$$

Видим, что необходимо введение новой гипотезы для того, чтобы установить связь квантовых чисел $n_l$ и $n_k$ с соответствующими радиусами орбит $r_l$ и $r_k$.

Гипотеза, предложенная Бором в 1913 году, заключается в квантовании момента импульса вращающегося по круговой орбите электрона:

$$mvr = n\frac{h}{2\pi}.$$

Исторической справедливости ради, отметим, что и до Бора предпринимались попытки квантования физических величин, связанных с орбитальным движением. Тем не менее, гениальная интуиция Бора сыграла решающую роль.

Рассмотрим вопрос с размерностной точки зрения, не выбирая заранее, какую величину нужно квантовать. Запишем более общее условие квантования в виде

$$v^\alpha r^\beta = nC_0,$$

где $\alpha, \beta, C_0$ – некоторые постоянные. Заметим, что случай $\alpha = 2$ и $\beta = 0$ ведет к квантованию энергии, выбор $\alpha = 1$ и $\beta = 0$ характеризует импульс, а комбинация $\alpha = 1$ и $\beta = 1$ соответствует моменту импульса.

Итак, мы получили систему трех уравнений с тремя неизвестными $v$, $r$, $n$ и тремя постоянными $\alpha, \beta, C_0$:

$$E(r) = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r},$$

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

$$v^\alpha r^\beta = nC_0.$$

Исключая переменные $v$ и $r$, найдем зависимость энергии электрона $E(r(n)) = E_n$ от квантового числа $n$:

$$E_n = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m (C_0 n)^{\frac{2}{\alpha}}}\right)^{\frac{\alpha}{2\beta-\alpha}} \sim \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{2\beta-\alpha}}.$$

Для получения зависимости $E_n \sim \frac{1}{n^2}$, необходимо предположить, что

$$2\beta - \alpha = 1, \text{ или } \beta(\alpha) = \frac{1+\alpha}{2}.$$

Очевидно, в рамках размерностного подхода мы ожидаем увидеть целые значения $\alpha$ и $\beta$, что обеспечивается нечетными значениями числа $\alpha$: $\alpha = 1, 3, 5, \ldots$ Однако выбор $\alpha = \beta = 1$ можно интерпретировать в терминах сохранения момента импульса электрона. Это важный аргумент, поскольку сохранение момента импульса орбитального движения в поле ньютоновских или кулоновских сил является основой описания некруговых траекторий. Сам Бор затронул этот вопрос только косвенно, указав на возможность сопоставления круговой и эллиптической орбит электрона с заданной энергией посредством выбора радиуса круговой обиты. С другой стороны, момент импульса имеет размерность постоянной Планка $h$:

$$rp = rmv = C_* n,$$

где $C_* = mC_0 = \frac{h}{2\pi}$ — постоянная, которая соответствует уравнению, описывающему гипотезу Бора.

Естественно, универсальная постоянная $h$ должна участвовать в уравнении, описывающем излучение в соответствии с фундаментальными идеями Планка. Важно, что во времена Планка и Бора постоянная $h$ все еще оставалась магической величиной, требующей интерпретации, и модель квантования Бора стала еще одним шагом в этом направлении.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

# Эйлер и геометрия

## А.ЗАСЛАВСКИЙ

Леонард Эйлер был одним из самых разносторонних математиков всех времен. Разумеется, не осталась обделенной вниманием Эйлера и элементарная геометрия. В этой статье будут описаны основные результаты, связанные с именем Эйлера, и приведены примеры использующих эти результаты задач, которые предлагались на геометрической олимпиаде имени И.Ф.Шарыгина. Следует, впрочем, сказать, что нельзя достоверно утверждать ни того, что указанные результаты принадлежат целиком Эйлеру, ни того, что достижения Эйлера в геометрии этими результатами ограничиваются.

### Прямая Эйлера

**Теорема 1.** *Пусть $ABC$ – произвольный треугольник, $M$ – его центр тяжести (точка пересечения медиан), $O$ – центр описанной окружности, $H$ – ортоцентр (точка пересечения высот). Точка $M$ лежит на отрезке $OH$ и $OM : MH = 1 : 2$.*

**Доказательство.** Пусть $A_0$, $B_0$, $C_0$ – середины отрезков $BC$, $CA$, $AB$ (рис.1). Тогда треугольник $A_0B_0C_0$ гомотетичен треугольнику $ABC$ с центром $M$ и коэффициентом $-\frac{1}{2}$. При этой гомотетии точка $H$ переходит в ортоцентр треугольника $A_0B_0C_0$ – точку $O$.

Прямая, на которой лежат точки $O$, $M$, $H$, называется *прямой Эйлера* треугольника.

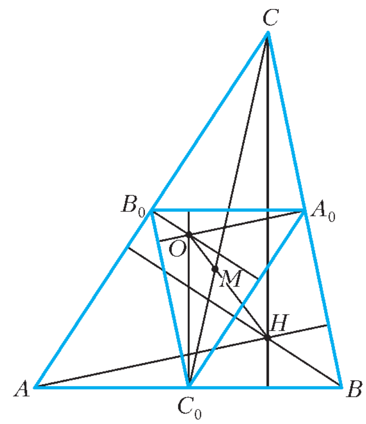

Рис. 1

**Задача 1.** *В остроугольном неравностороннем треугольнике отметили 4 точки: центры вписанной и описанной окружностей, центр тяжести (точка пересечения медиан) и ортоцентр (точка пересечения высот). Затем сам треугольник стерли. Оказалось, что невозможно установить, какому центру соответствует каждая из отмеченных точек. Найдите углы треугольника.*

**Ответ.** Треугольник, удовлетворяющий условию задачи, равнобедренный с углами при основании, равными $\arccos\frac{1}{4}$.

**Решение.** Пусть $ABC$ – исходный треугольник. Если точка $I$ (центр вписанной окружности) не лежит на его прямой Эйлера, то можно однозначно установить роль каждой из точек в треугольнике $ABC$. Отметим, что эта прямая проходит не более чем через одну вершину треугольника, так что можно считать, например, что точки $A$ и $B$ не лежат на ней. Так как $\angle OBA = \angle HBC = \frac{\pi}{2} - \angle C$, то $BI$ является биссектрисой угла $HBO$. Значит, точка $I$ лежит на отрезке $OH$, причем $OI = 2IH$ (иначе роль точек устанавливается однозначно). По свойству биссектрисы получаем, что $BO = 2BH$. Рассуждая аналогично, находим, что $AO = 2AH$. Таким образом, $AH = BH = R/2$, где $R$ – радиус описанной около треугольника окружности. Заметим теперь, что из гомотетии, указанной в доказательстве теоремы 1, следует также, что $AH = 2OA_0$ (и эти отрезки параллельны). Понятно так-