Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 декабря 2005 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №5–2005» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1966» или «Ф1973». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1966–М1969, М1971, М1972(а), М1973–М1975 предлагались на XXXI Всероссийской олимпиаде школьников по математике.

Задача М1970 предлагалась на XXVI Международном математическом турнире городов.

Задачи М1966 – М1975, Ф1973–Ф1982

М1966. Докажите, что если число $\underbrace{11\ldots11}_{n\text{ единиц}}2\underbrace{11\ldots11}_{n\text{ единиц}}$ делится на 11, то оно также делится и на 121.

В.Сендеров

М1967. В наборе из одиннадцати различных по весу гирь каждая весит натуральное число граммов. Известно, что суммарный вес любых семи гирь больше суммарного веса четырех оставшихся. Найдите наименьший возможный суммарный вес всех гирь набора.

О.Подлипский, И.Богданов

М1968. Каждую вершину выпуклого четырехугольника Q отразили симметрично относительно диагонали, не содержащей эту вершину. Полученные точки являются вершинами четырехугольника Q'.

а) Докажите, что если Q – трапеция, то Q' также является трапецией.

б) Докажите, что отношение площади Q' к площади Q меньше 3.

Л.Емельянов

М1969. На оборотных сторонах 2005 карточек написаны различные числа (на каждой по одному). За один вопрос разрешается указать на любые три карточки и узнать множество чисел, написанных на них. За какое наименьшее число вопросов можно узнать, какие числа записаны на каждой карточке?

И.Богданов

М1970. Существует ли такой квадратный трехчлен $f(x)$, что для любого целого положительного n уравнение $\underbrace{f\left(f\left(\ldots f\left(x\right)\right)\right)}_{n\text{ раз}}=0$ имеет ровно 2^n различных действительных корней?

А.Толпыго

М1971. В таблице $2\times n$ расставлены положительные числа так, что в каждом из n столбцов сумма двух чисел равна 1. Докажите, что можно вычеркнуть по одному числу в каждом столбце так, чтобы в каждой строке сумма оставшихся чисел не превосходила $\frac{n+1}{4}$.

Е.Куликов

М1972. На плоскости расположено бесконечное множество L прямых, никакие две из которых не параллельны. Известно, что как бы ни расположить на плоскости квадрат со стороной 1, он будет пересекаться хотя бы с одной прямой множества L. Докажите, что найдется квадрат со стороной а) 0,8; б) 0,75, который пересекается не менее чем с тремя прямыми множества L.

С.Волчёнков

М1973. В треугольнике ABC $(AB<BC)$ точка I – центр вписанной окружности, M – середина стороны AC, N – середина дуги ABC описанной окружности. Докажите, что $\angle IMA=\angle INB$.

А.Бадзян

М1974. На бесконечном белом листе клетчатой бумаги конечное число клеток окрашено в черный цвет так, что у каждой черной клетки четное число (0, 2 или 4) белых клеток, соседних с ней по стороне. Докажите, что каждую белую клетку можно покрасить в красный или зеленый цвет так, чтобы у каждой черной клетки стало поровну красных и зеленых клеток, соседних с ней по стороне.

А.Глебов, Д.Фон-Дер-Флаасс

М1975. а) За круглым столом сидят 100 представителей 50 стран, по двое от каждой страны. Докажите, что их можно разбить на две группы таким образом, чтобы в каждой группе было по одному представителю от каждой страны и каждый человек находился в одной группе не более чем с одним своим соседом.

б*) За круглым столом сидят 100 представителей 25 стран, по 4 представителя от каждой. Докажите, что их можно разбить на 4 группы таким образом, чтобы в каждой группе было по одному представителю от каждой страны и никакие двое из одной группы не сидели за столом рядом.

С.Берлов

Ф1973. Камень бросают под углом α к горизонту, придав ему начальную скорость v_0. Точка падения камня на H ниже точки броска. Вектор скорости камня в полете поворачивается. Найдите максимальное и минимальное значения угловой скорости этого вращения. Земля, как известно, плоская; считайте, что воздуха на ней нет.

З.Рафаилов

Ф1974. По гладкому горизонтальному столу может двигаться куб массой M. На нем находится другой куб – поменьше, его масса m. На кубы действуют горизонтальные силы: F – на нижний и f – на верхний. Силы эти параллельны, приложены к центрам кубов и направлены в одну сторону. Найдите ускорения кубов. Коэффициент трения между верхним и нижним телами μ. Кубы двигаются поступательно, не вращаясь.

Р.Александров

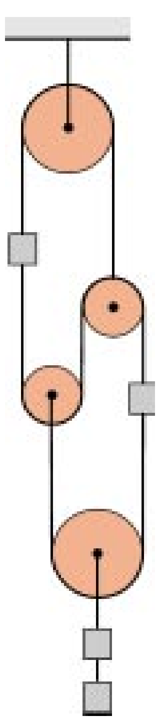

Рис. 1

Ф1975. В системе, изображенной на рисунке 1, грузы имеют одинаковые массы, блоки и нити очень легкие, нити нерастяжимы, свободные их куски вертикальны. Найдите ускорения блоков. Ось самого верхнего блока закреплена.

А.Блоков

Ф1976. Население Земного шара составляет в наши дни приблизительно 4,5 миллиарда человек. Сколько килограммов воздуха приходится на каждого человека?

А.Мальтусов

Ф1977. Средняя квадратичная скорость молекул воздуха в комнате 500 м/с, длина свободного пробега 0,01 мм. В данный момент выбранная для наблюдения молекула находится посредине квадратной комнаты площадью 25 $м^2$. Оцените среднее время, необходимое для ее путешествия до одной из стен.

А.Томов

Ф1978. Медная тонкостенная сфера радиусом R заряжена, полный заряд сферы Q. На расстоянии $R/3$ от центра сферы находится точечный заряд q, а на расстоянии $3R$ от центра сферы помещен точечный заряд $2q$. Найдите потенциалы центра сферы и самой сферы. Какой заряд протечет по тонкому проводу, если этим проводом сферу заземлить?

Ф.Изиков

Ф1979. В изображенной на рисунке 2 цепи конденсаторы одинаковы, емкость каждого $C = 100$ мкФ, резистор имеет сопротивление $R = 100$ кОм, батарейка с ЭДС $\mathcal{E} = 10$ В обладает внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом. Цепь замыкают. Какой ток течет по резистору через время $\tau = 0{,}1$ с после включения, и какой ток в этот же момент течет через батарейку? Какое количество теплоты выделится в резисторе за большое время?

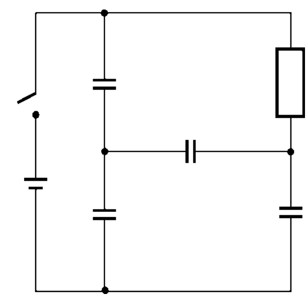

Рис. 2

А.Зильберман

Ф1980. В одной плоскости с длинным прямым проводом закреплено маленькое сверхпроводящее кольцо из очень тонкого провода. Диаметр кольца $d = 1$ см, центр кольца находится на расстоянии $H = 1$ м от провода, индуктивность кольца $L = 10$ мкГн. По проводу пропускают электрический ток – сила тока быстро возрастает от нуля до $I = 10$ А. Какой установившийся ток потечет по кольцу? Какая сила при этом будет действовать на кольцо?

З.Сильнов

Ф1981. К источнику переменного напряжения (звуковой генератор) подключена последовательная цепь, состоящая из катушки индуктивностью $L = 1$ Гн, конденсатора емкостью $C = 1$ мкФ и резистора сопротивлением R. Будем увеличивать частоту напряжения источника, сохраняя неизменной его амплитуду. При каких условиях напряжение, измеренное идеальным вольтметром на выводах конденсатора, будет при увеличении частоты вначале увеличиваться, а затем уменьшаться? На какой частоте напряжение конденсатора окажется максимальным при $R = 100$ Ом?

А. Повторов

Ф1982. Источник света, имеющий очень маленькие размеры, движется вдоль главной оптической оси собирающей линзы с постоянной скоростью v, а линза движется навстречу ему с неизменной скоростью $2v$. В некоторый момент скорость изображения оказалась по величине равной v (все три скорости заданы относительно неподвижной системы отсчета). Найдите увеличение, которое дает линза в этот момент. С каким ускорением движется в этот момент изображение? Изображение получают на экране, расположенном перпендикулярно главной оптической оси линзы, фокусное расстояние линзы F.

А.Старов