Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 апреля 2005 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №1–2005» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1936» или «Ф1943». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1936—М1945, Ф1943—Ф1952

М1936. Какую наименьшую ширину должна иметь бесконечная полоса бумаги, чтобы из нее можно было вырезать любой треугольник площади 1?

Д.Семёнов (ученик 11 кл.)

М1937. Окружности S_1, S_2, S_3 попарно касаются друг друга внешним образом (рис.1). Пусть A, B, C – точки касания S_1 и S_2, S_1 и S_3, S_2 и S_3 соответственно. Прямая AB повторно пересекает S_2 и S_3 в точках D и E соответственно. Прямая DC повторно пересекает S_3 в точке F. Докажите, что ΔDEF прямоугольный.

И.Рудаков

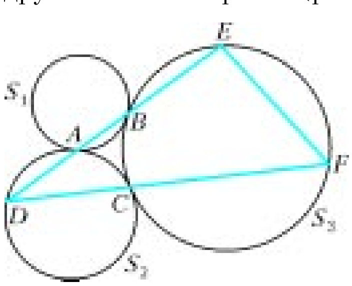

Рис. 1

М1938. Для любых чисел $x_1, \ldots, x_n$ докажите неравенство

$$\max\{x_1, \ldots, x_n, -x_1 - \ldots - x_n\} \geq \frac{|x_1| + \ldots + |x_n|}{2n-1}.$$

Н.Осипов

М1939. Вершины 50 прямоугольников разделили окружность на 200 равных дуг. Докажите, что среди прямоугольников найдутся два равных.

В.Произволов

М1940. Пусть a – натуральное число. Докажите, что уравнение $x(x+a) = y^2$

а) при a = 1, 2, 4 не имеет решений в натуральных числах;

б) при любом другом натуральном a имеет их.

В.Сендеров

М1941. На плоскости жили 44 веселых чижа, точечных и непрозрачных. После посещения плоскости Мурзиком чижи разлетелись и расселись на плоскости так, что каждый из них видит ровно 10 других. Докажите, что посещение Мурзиком плоскости уменьшило количество проживающих на ней веселых чижей.

Г.Гальперин, В.Сендеров

М1942. Внутри острого угла с вершиной O даны точки A и B. Бильярдный шар может попасть из A в B, отразившись либо от одной стороны угла в точке M, либо от другой в точке N. Докажите, что если $OA = OB$, то точки O, A, B, M, N лежат на одной окружности.

А.Заславский

М1943. По кругу расставлено несколько корзин (не меньше трех). Первоначально в одной из них лежит одно яблоко, а остальные корзины пусты. Далее неоднократно проделывают следующее: из какой-либо корзины вынимают яблоко, а взамен кладут по одному яблоку в каждую из двух соседних с ней корзин. При каком количестве корзин можно добиться того, чтобы во всех корзинах яблок стало поровну?

И.Акулич

М1944. Квадратный стол площади 5 можно покрыть в четыре слоя пятью квадратными салфетками, площадь каждой из которых равна 4. Как это сделать? Салфетки разрешается перегибать.

В.Произволов

М1945. Всякий ли остроугольный треугольник можно расположить в пространстве так, что его вершины окажутся

а) на ребрах какого-нибудь куба, выходящих из одной его вершины;

б) на диагоналях граней какого-нибудь куба, выходящих из одной его вершины?

С.Дворянинов, В.Сендеров

Ф1943. По горизонтальному столу скользит плоский лист фанеры, на котором нарисована система координат xy. В данный момент скорость точки A с координатами (1; 3) направлена вдоль оси x и равна 1 м/с. Скорость точки $Б$ с координатами (2; 1) составляет в тот же момент угол 45° с осью x. Где находятся точки листа, скорости которых по величине не превосходят 1 см/с?

А.Центров

Ф1944. В системе на рисунке 2 все блоки одинаковы, их массы практически сосредоточены в тонких осях. Найдите ускорения блоков после того, как мы перережем нить в точке A. Нити считать нерастяжимыми и очень легкими. Свободные куски нитей вертикальны.

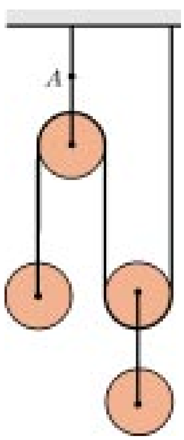

Рис. 2

А.Зильберман

Ф1945. На горизонтальном гладком столе покоится клин массой M с углом α при основании. На него наезжает со скоростью v_0 маленькое тело массой m и начинает подниматься вверх по клину (удара при этом не происходит – у основания клина сделан плавный «въезд»). При какой высоте клина H маленькое тело поднимется по нему на самый верх? С какой скоростью будет двигаться клин после того, как маленькое тело его покинет?

А.Повторов

Ф1946. В сосуде под поршнем находится моль гелия. Медленно нагреваем газ, при этом его объем увеличивается, однако частота ударов частиц о неподвижное дно сосуда остается неизменной. Найдите теплоемкость газа в таком процессе.

З.Рафаилов

Ф1947. В легком тонкостенном сосуде мы нагреваем при помощи кипятильника 1 литр воды. Температура достигает 60 °С и никак дальше не растет. Нам надоело, и мы выключаем нагреватель. За первые 20 секунд вода остывает на 2 градуса. На упаковке кипятильника было написано: «500 ватт, сделано в Китае». Сколько ватт содержит «китайский ватт»?

О.Простов

Ф1948. Три тонкие пластины в виде кругов диаметром D расположены параллельно друг другу, расстояние между соседними пластинами d ($d \ll D$). Средняя пластина равномерно заряжена по поверхности зарядом $2Q$, крайние – тоже равномерно, но зарядами противоположного знака по $-Q$ каждая. Найдите потенциалы центров пластин. Других тел рядом нет.

А.Повторов

Ф1949. Мостик из четырех резисторов подключен к батарейке. К диагонали мостика подключили последовательно соединенные другую батарейку – ее напряжение известно и составляет 12 В – и амперметр. Показания прибора при этом составили 5 мА. После того, как мы поменяли местами выводы батарейки напряжением 12 В, ток через амперметр поменял направление и стал равен 35 мА. Потом поменяли местами батарейки – ток амперметра упал до нуля. Что покажет прибор, если одну из батареек теперь включить «наоборот» (поменять местами выводы)?

Р.Александров

Ф1950. Из куска тонкого провода, имеющего сопротивление r = 100 Ом, сделали квадратный контур и охватили им длинный соленоид, по которому пропускают изменяющийся со временем по линейному закону ток. Ток в контуре составил при этом I = 5 мА. Какое напряжение покажет вольтметр, включенный вместо одной из сторон квадрата? Что будет показывать этот вольтметр в другом случае – если сторону квадратного контура не убирать, а просто подключить вольтметр короткими проводами к концам этой стороны? Сопротивление вольтметра R = 1000 Ом.

А.Старов

Ф1951. Одинаковые конденсаторы емкостью C каждый соединяют последовательно, а крайние выводы получившейся цепочки подключают к зажимам последовательно соединенных батареек напряжением U слева и $2U$ справа (рис.3). Немного подождав, между точками A и $Б$ включают катушку индуктивностью L. Найдите максимальное значение силы тока через катушку. Найдите также максимальные заряды конденсаторов. Сопротивление проводов считать малым (но не нулевым!). Батарейки, конденсаторы и катушку считать идеальными.

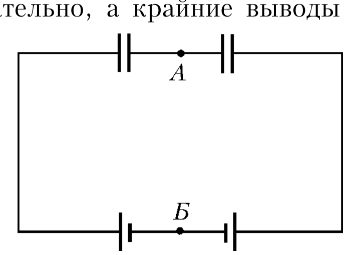

Рис. 3

З.Рафаилов

Ф1952. В фокусе большого параболического отражателя находится точечный источник радиоволн частотой f = 1000 МГц, диаметр параболического отражателя D = 6 м. Из-за дифракции система излучает расходящийся пучок волн. На сколько нужно отодвинуть источник вдоль оси параболоида, чтобы расходимость пучка увеличилась примерно в три раза?

З.Волнов

Поправка и замечание

Новая формулировка задачи **М1935**: «Все грани тетраэдра – подобные треугольники. Верно ли , что они равны?»

При решении задачи **М1934** разрешается считать, что числа взаимно просты в совокупности.