

Рис. 1

тельно (начало одной – к концу другой). К свободным выводам получившейся «двойной» катушки подключают батарейку напряжением $U = 3$ В. Через время $\tau = 0,5$ с батарейку отключают. Какой ток течет через батарейку через время $0,5\tau$ после включения? Какое количество теплоты выделится в резисторе за время τ после включения и после отключения батарейки?

Сразу после включения батарейки токи через катушки будут изменяться так, что сумма ЭДС индукции первичных обмоток будет в любой момент равна напряжению батарейки U . Обмотки одинаковые, значит, ЭДС индукции вторичной обмотки равна $U/2$, и через резистор будет течь неизменный ток

$$I_2 = \frac{U/2}{R} = \frac{U}{2R} = 0,015 \text{ А}$$

все время, пока подключена батарейка. Магнитный поток через обмотки не может изменяться мгновенно, скачком, а ток через вторичную обмотку должен возникнуть сразу после подключения батарейки. Это значит, что ток через первичные обмотки тоже возникнет мгновенно. Величина этого тока будет равна

$$I_1 = \frac{1}{2} I_2$$

(не должен мгновенно измениться суммарный магнитный поток, создаваемый токами всех обмоток). Ток

вторичной обмотки не меняется, при расчете ЭДС индукции его можно не учитывать:

$$2L \frac{\Delta I_{\text{бат}}}{\Delta t} = U,$$

откуда

$$I_{\text{бат}} = -\frac{1}{2} I_2 + \frac{U}{2L} t.$$

Для момента $t = \tau/2$ (рис.2) ток, текущий через батарейку, равен

$$I_1^* = -\frac{1}{2} \frac{U}{2R} + \frac{U\tau/2}{2L} = 0,3675 \text{ А}.$$

Рассчитаем теперь количество теплоты, выделяющееся в резисторе за время $\tau = 0,5$ с после включения батарейки:

$$Q_1 = I_2^2 R \tau = 0,01125 \text{ Дж}.$$

После отключения батарейки ток вторичной обмотки увеличивается скачком (магнитный поток через нее мгновенно измениться не может):

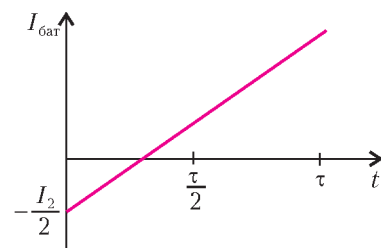


Рис. 2

$$I_2^* = I_2 + 2 \frac{U\tau}{2L} = 1,515 \text{ А}.$$

За время $\tau = 0,5 \text{ с} \geq \frac{L}{R} = 0,01 \text{ с}$ после отключения батарейки практически вся энергия катушки перейдет в тепло:

$$Q_2 = \frac{L I_2^{*2}}{2} \approx 1,15 \text{ Дж}.$$

А.Зильберман

Две знаменитые формулы

(Начало см. на с. 11)

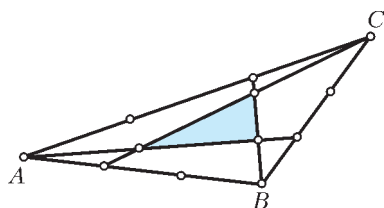


Рис. 16

15. Каждая сторона треугольника ABC разделена на три равные части и одна из точек деления соединена с вершиной так, как это показано на рисунке 16. Сравните площадь выделенного треугольника с площадью треугольника ABC .

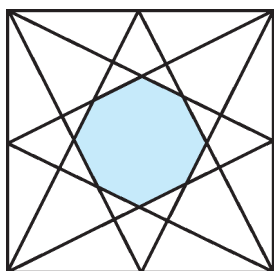


Рис. 17

16. Середины сторон квадрата соединены отрезками так, как это показано на рисунке 17. Найдите отношение площади квадрата к площади восьмиугольника, образованного проведенными отрезками.

17. Пусть

$$f(P) = aN_i(P) + bN_e(P) + c,$$

где a, b, c – некоторые числа. Пусть эта функция, заданная на всех простых многоугольниках, расположенных на целочисленной решетке \mathbb{Z}^2 , такова, что $f(P) = f(P_1) + f(P_2)$, если P разбит некоторой ломаной с вершинами в узлах решетки на два простых многоугольника P_1 и P_2 . Докажите, что $b = a/2$ и $c = -a$.

18. Докажите, что для любого простого многоугольника P на решетке \mathbb{Z}^2 имеет место равенство

$$2[P] = N(2P) - 2N(P) + 1,$$

где $N(P)$ обозначает полное число узлов решетки, расположенных как внутри, так и на границе многоугольника P , а $2P$ – многоугольник, полученный из P растяжением в два раза относительно начала координат.

19. Укажите на плоскости 1000 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой и такие, что расстояние между любыми двумя точками выражается иррациональным числом, а площадь любого треугольника, с вершинами в этих точках, выражается рациональным числом.

Две знаменитые формулы

В. ВАВИЛОВ, А. УСТИНОВ

Н АПОМНИМ, ЧТО ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ РЕШЕТКОЙ \mathbb{Z}^2 называется множество точек декартовой плоскости с целыми координатами. Бывает удобным представлять себе целочисленную решетку как бесконечный лист клетчатой бумаги. Многоугольник считается расположенным на \mathbb{Z}^2 , если все его вершины являются точками (узлами) этой решетки.

В статье речь пойдет о формуле Пика для вычисления площадей многоугольников, расположенных на целочисленной решетке, и об одной комбинаторной формуле Эйлера. Отдельное внимание будет уделено связи между ними.

Примитивные треугольники

Прежде чем изучать произвольные многоугольники на решетке, рассмотрим простейший (и важнейший!) частный случай. Предположим, что многоугольник является треугольником и кроме своих вершин не имеет внутри и на сторонах других узлов решетки. Такие треугольники называются *примитивными* (см. примеры на рисунке 1).

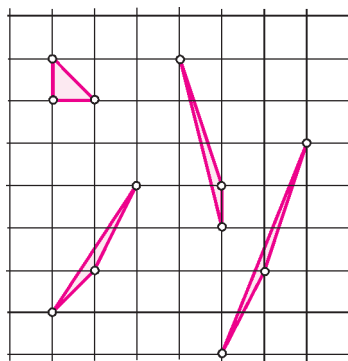


Рис. 1

Их свойства мы сначала и изучим.

Их свойства мы сначала и изучим.

Их свойства мы сначала и изучим.

Теорема 1. *Треугольник является примитивным тогда и только тогда, когда он имеет площадь $1/2$.*

Доказательство. Пусть $T = ABC$ – примитивный треугольник. Рассмотрим минимальный прямоугольник с вершинами в узлах решетки \mathbb{Z}^2 и сторонами, параллельными осям координат, содержащий треугольник ABC . Из всех возможных случаев взаимного

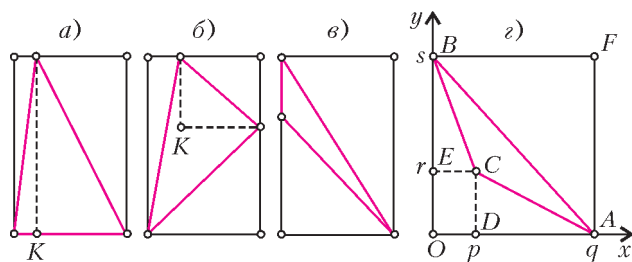


Рис. 2

расположения треугольника и прямоугольника (рис. 2) наиболее общей является ситуация, показанная на рисунке 2, г.

Действительно, в случаях а) и б) треугольник T не является примитивным, так как точка K имеет целые координаты; случай г) включает в себя случай в), если предполагать, что вершина C может располагаться на OB или OA (в частности, может совпадать с O).

Будем считать, что точка O на рисунке 2, г является началом координат, $D = (p; 0)$, $A = (q; 0)$, $E = (0; r)$, $B = (0; s)$. Через $I(P)$ будем обозначать число узлов решетки, расположенных внутри многоугольника P , но не на его сторонах. Тогда

$$I(OAFB) = (q - 1)(s - 1).$$

Так как внутри отрезка AB не содержится узлов решетки, то

$$I(OAB) = I(OAFB)/2 = (q - 1)(s - 1)/2.$$

Аналогично,

$$I(ACD) = (q - p - 1)(r - 1)/2,$$

$$I(CBE) = (s - r - 1)(p - 1)/2.$$

Треугольник T не содержит внутри себя узлов решетки. Значит,

$$I(OAB) - I(ACD) - I(CBE) = pr,$$

где pr – число узлов решетки, расположенных внутри прямоугольника $ODCE$, но включая число узлов на его сторонах CD и CE (без точек D и E). Отсюда следует, что

$$(q - 1)(s - 1) - (q - p - 1)(r - 1) - (s - r - 1)(p - 1) = 2pr,$$

и, тем самым,

$$qs - ps - qr = 1.$$

Используя это равенство, получаем – здесь и далее $[F]$ обозначает площадь фигуры F –

$$\begin{aligned} [ABC] &= [OAB] - [ACD] - [CBE] - [ODCE] = \\ &= sq/2 - (p - q)r/2 - (s - r)p/2 - pr = \\ &= (qs - ps - qr)/2 = 1/2, \end{aligned}$$

что и дает прямое утверждение теоремы.

Докажем обратное утверждение, предположив противное: существует треугольник площади $1/2$, который не является примитивным.

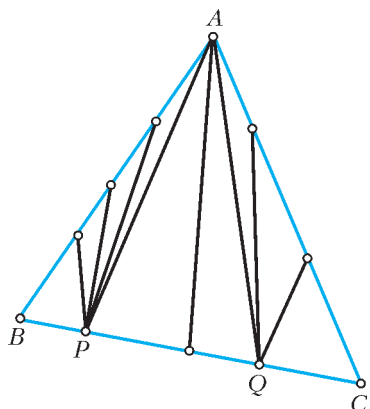


Рис. 3

и AQC, окажутся примитивными, а у этих двух крайних треугольников имеется по две стороны, которые не содержат узлов решетки. Соединив точки P и Q с узлами решетки, находящимися на сторонах AB и AC соответственно, мы разобьем треугольники ABP и AQC на примитивные треугольники.

Пусть у данного треугольника имеются узлы решетки внутри. Выбрав произвольный из них, соединим его

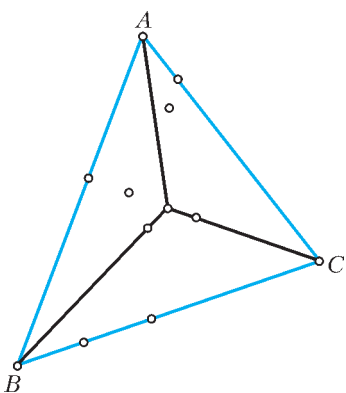


Рис. 4

на треугольники, не содержащие внутри себя узлов решетки. Теперь разбиение на примитивные треугольники можно закончить, используя описанную ранее процедуру.

Вернемся к доказательству достаточности. Разобьем треугольник T на примитивные. Согласно сделанному предположению, их будет не менее двух. Из прямого утверждения теоремы вытекает, что каждый из них имеет площадь 1/2, а это невозможно, так как [T] = 1/2.

Упражнение 1. Докажите, что для любого сколь угодно большого числа M на решетке \mathbb{Z}^2 существует примитивный треугольник, все стороны которого больше этого числа M.

Формула Пика

Далее, если не оговорено противное, рассматриваются простые многоугольники, т.е. такие, которые ограничены замкнутой несамопересекающейся ломаной. На рисунке 5 показаны примеры многоугольников, которые простыми не являются.

Теорема 2 (Г.Пик). Для любого простого многоугольника P на целочисленной решетке имеет место

Сначала покажем, что любой треугольник можно разбить на примитивные. Пусть внутри треугольника T = ABC нет точек решетки, но имеются узлы решетки на одной из его сторон, скажем BC. Тогда соединим вершину A со всеми узлами решетки на стороне BC (рис.3). Все полученные треугольники, кроме ABP

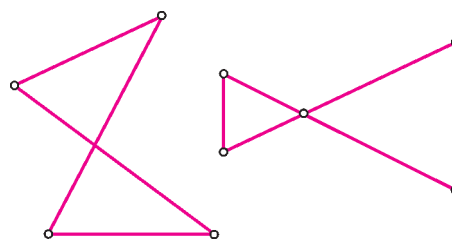


Рис. 5

формула

$$[P] = N_i + N_e/2 - 1,$$

где N_i – число узлов решетки, расположенных строго внутри многоугольника, и N_e – число узлов решетки, расположенных на его границе (включая вершины).

Так, например, на рисунке 6 мы имеем: $N_i = 9$, $N_e = 11$, и, тем самым, по формуле Пика

$$[P] = 9 + 11/2 - 1 = 27/2.$$

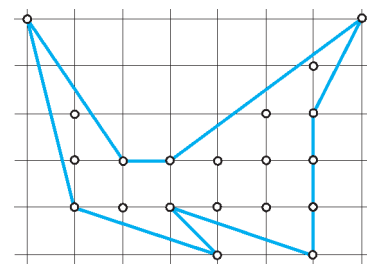


Рис. 6

Доказательство.

Приступая к доказательству теоремы, во-первых, отметим, что любой простой многоугольник имеет по крайней мере одну диагональ, которая целиком расположена внутри многоугольника.

Упражнение 2. Докажите это утверждение.

Отсюда и из принципа математической индукции следует, что любой простой k-угольник можно разбить на (k - 2) треугольника, все вершины которых являются вершинами исходного многоугольника и, в частности, узлами решетки. Поэтому сумма всех внутренних углов простого k-угольника равна (k - 2)π.

Во-вторых, каждый из полученных треугольников разобьем на примитивные так, как это делалось при доказательстве теоремы 1. Поскольку площадь каждого примитивного треугольника равна 1/2, то число примитивных треугольников в разбиении равно $N = 2[P]$ и поэтому не зависит от способа разбиения.

Для завершения доказательства теоремы 2 осталось проверить равенство

$$N = 2N_i + N_e - 2.$$

Далее будем предполагать, что P является k-угольником. Его вершины также будут и вершинами некоторых примитивных треугольников разбиения (рис.7,а). Сумма углов треугольников при таких вершинах равна сумме внутренних углов многоугольника P и, тем самым, равна $180^\circ(k - 2)$.

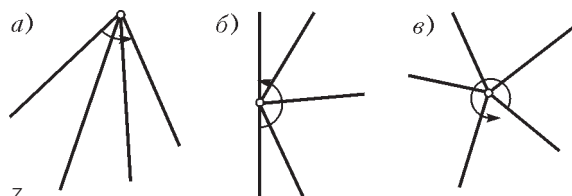


Рис. 7

Узел решетки, который находится на границе P , но не является его вершиной, также участвует в разбиении и служит вершиной некоторых примитивных треугольников (рис.7,б), а сумма всех углов при всех таких вершинах-узлах равна $180^\circ(N_e - k)$.

Каждая из N_i точек решетки (находящихся внутри P) участвует в разбиении на примитивные треугольники и является их вершинами. Сумма углов, сходящихся в такой точке, равна 360° (рис.7,в). Поэтому сумма всех углов всех примитивных треугольников с вершинами во внутренних узлах равна $360^\circ N_i$.

С другой стороны, сумма углов всех примитивных треугольников равна $180^\circ N$, и поэтому

$$180^\circ N = 360^\circ N_i + 180^\circ(N_e - k) + 180^\circ(k - 2).$$

Следовательно, $N = 2N_i + N_e - 2$, и теорема 2 полностью доказана.

Замечание. Пусть плоскость разбита на равные параллелограммы двумя семействами параллельных прямых (это разбиение можно представлять себе как «косоугольную клетчатую бумагу»). Тогда вершины параллелограммов образуют множество, которое называется *точечной решеткой* Λ . Целочисленная решетка – важный частный случай, когда параллелограммы являются квадратами.

Для многоугольника P на произвольной решетке Λ также справедлива формула Пика

$$[P] = (N_i + N_e/2 - 1)\Delta(\Lambda),$$

где $\Delta(\Lambda)$ – площадь каждого из параллелограммов. Доказательство проводится точно по той же схеме.

Логический анализ доказательства теоремы 2

Сформулируем еще раз три доказанных нами утверждения.

1°. Для любого простого многоугольника P на решетке \mathbb{Z}^2 имеет место формула Пика

$$[P] = N_i + N_e/2 - 1.$$

2°. Площадь любого примитивного треугольника на решетке \mathbb{Z}^2 равна $1/2$.

3°. В любом разбиении простого многоугольника на примитивные треугольники для их числа N справедлива формула

$$N = 2N_i + N_e - 2.$$

Проследим логические связи между этими утверждениями и сравним их «силу».

Если бы с самого начала была доказана формула Пика, то утверждение 2° было бы ее тривиальным следствием, а утверждение 3° следовало бы из 1° и 2° вместе взятых (рис.8,а). При таком подходе (а он возможен – см. упражнение 3) для проверки всех трех утверждений нам понадобилось бы доказать формулу Пика независимо от 2° и 3°.

Мы избрали другой путь: сначала доказали утверждение 2° независимо, затем получили 3°, а формула Пика оказалась следствием их обоих (рис.8,б).

Интересно проследить и за другими возможными

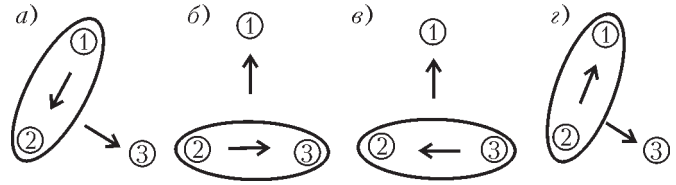


Рис. 8

логическими подходами к доказательству этих трех утверждений, показанными на рисунке 8,в и г.

Покажем, как из 3° следует 2°. Заметим сначала, что площадь любого треугольника на решетке \mathbb{Z}^2 (а тем самым, и любого простого многоугольника на ней) выражается числом вида $n/2$. Для этого частично повторим рассуждения, использованные нами при доказательстве теоремы 1. Опишем вокруг треугольника минимальный прямоугольник со сторонами вдоль линий решетки. Как и раньше, возможны несколько случаев их взаимного расположения, показанных на рисунке 2. В каждом из них треугольник дополняется до прямоугольника фигурами, имеющими целую или полуцелую площадь. Таким образом, площадь любого треугольника на целочисленной решетке должна быть полуцелым числом, и, следовательно, эта площадь не меньше $1/2$.

Пусть теперь T – примитивный треугольник и P – минимальный прямоугольник, описанный около него. Разобьем все многоугольники, дополняющие T до P , на примитивные треугольники. В итоге получим разбиение P на примитивные треугольники $\{T_k\}$, один из которых совпадает с T .

Разобьем P на примитивные треугольники другим способом, проводя диагонали в каждой из pq составляющих его квадратных ячеек решетки.

Число примитивных треугольников во втором разбиении (а по условию 3° – и в первом) равно $2pq$. Значит,

$$\sum_{k=1}^{2pq} [T_k] = pq.$$

Каждое слагаемое в сумме, по доказанному, не меньше $1/2$. Поэтому равенство возможно лишь тогда, когда все слагаемые, в том числе и $[T]$, равны $1/2$.

Докажем импликацию $2^\circ \Rightarrow 1^\circ$. Для этого рассмотрим функцию

$$F(P) = N_i + N_e/2 - 1,$$

определенную на всех простых многоугольниках, расположенных на решетке \mathbb{Z}^2 . Если разбить многоугольник P при помощи какой-либо ломаной с вершинами в узлах решетки на два других многоугольника P_1 и P_2 (в этом случае мы пишем $P = P_1 + P_2$; рис.9), то, как легко проверить, имеет место следующее аддитивное свойство:

$$F(P_1 + P_2) = F(P_1) + F(P_2).$$

Площадь обладает тем же свойством:

$$[P_1 + P_2] = [P_1] + [P_2].$$

Поэтому, если формула

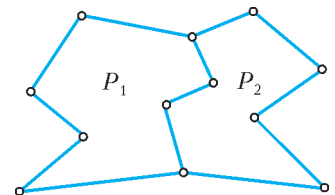


Рис. 9

Пика верна для многоугольников P_1 и P_2 , то она верна и для многоугольника $P = P_1 + P_2$. Но так как любой простой многоугольник можно разбить на примитивные треугольники, а формула Пика для них по нашему предположению верна, то она верна и для произвольного многоугольника.

Подводя итоги проведенного логического анализа, заключаем, что самым «сильным» является утверждение 1°. Но нами установлено, что каждое из трех утверждений может быть получено как следствие любого другого. И в этом смысле они эквивалентны!

Упражнение 3. Используя аддитивность функции $F(P)$ и рассуждения из доказательства теоремы 1 об описанном прямоугольнике, найдите независимое (от 2° и 3°) доказательство формулы Пика.

Формула Эйлера

Связь утверждений 1° и 3°, отмеченная в предыдущем разделе, показывает, что формула Пика имеет также и комбинаторный характер.

Более общим, чем разбиение многоугольника на треугольники, является понятие карты. *Правильная многоугольная карта* – это такое разбиение простого многоугольника на другие простые многоугольники, когда любые два многоугольника либо имеют общую сторону, либо имеют только одну общую вершину, либо вообще не имеют общих точек.

Карту можно рассматривать как частный случай *плоского односвязного графа*. При таком подходе многоугольники разбиения являются гранями графа, а стороны многоугольников – ребрами.

Для плоских графов (а в частности, и многоугольных карт) имеет место знаменитая *формула Эйлера*, которая утверждает, что

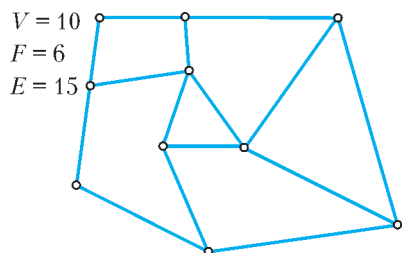


Рис. 10

$$V + F - E = 1,$$

где V обозначает число вершин графа, F – число граней, E – число ребер (рис. 10).

Слово «карта» подчеркивает, что формула Эйлера имеет место и для «криволинейных разбиений» (рис. 11), когда важна не форма линий, а

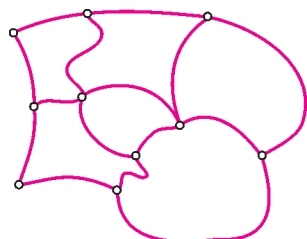


Рис. 11

только способ соединения точек с выполнением требования «правильности» (например, из разбиения пятиугольника на треугольники и четырехугольники, показанного на рисунке 10, заменой отрезков кривыми линиями получается правильная криволинейная карта).

В случае когда все внутренние части правильной многоугольной карты являются треугольниками, говорят о *триангуляции* многоугольника.

Ясно, что любой простой многоугольник P на плоскости может быть триангулирован бесконечным чис-

лом способов. Однако для числа N треугольников в триангуляции всегда (а не только на \mathbb{Z}^2) будет справедлива та же формула $N = 2N_i + N_e - 2$, которая ранее была установлена только для многоугольников на решетке. Отметим, что здесь смысл чисел N_i и N_e уже несколько иной: N_i – число вершин графа, находящихся внутри P , а N_e – на границе P . Докажите эту формулу самостоятельно!

Другое свойство триангуляций связано с общим числом E всех сторон треугольников, входящих в триангуляцию:

$$E = 3N_i + 2N_e - 3.$$

Действительно, так как имеется N_e вершин на границе P , то существует N_e треугольников, одна сторона которых находится на границе P и $E - N_e$ сторон которых находятся строго внутри P , причем каждая такая «внутренняя сторона» принадлежит ровно двум треугольникам. Следовательно, $3N$ сторон у N треугольников включают каждую из $E - N_e$ сторон дважды и каждую из N_e сторон по одному разу. Таким образом,

$$3N = 2(E - N_e) + N_e = 2E - N_e.$$

Следовательно,

$$E = \frac{3N + N_e}{2} = \frac{3(2N_i + N_e - 2) + N_e}{2} = 3N_i + 2N_e - 3,$$

что и утверждалось.

Теорема 3 (Л.Эйлер). Для любой правильной многоугольной карты имеет место равенство

$$V + F - E = 1.$$

Доказательство. Пусть имеется правильная многоугольная (криволинейная) карта. Выберем внутри каждого многоугольника разбиения одну точку. Соединим ее с вершинами многоугольника линиями (не обязательно отрезками) так, чтобы они находились строго внутри этого многоугольника (см. пример на рисунке 12).

Теперь заметим, что формула $E = 3N_i + 2N_e - 3$ справедлива и для вновь полученной «криволинейной триангуляции» R исходной карты. Для триангуляции R , очевидно, имеем

$$N_i + N_e = V + F.$$

Каждый треугольник в R одной своей стороной имеет ребро исходного графа, а две другие стороны – кривые, нами проведенные. Каждое новое ребро является общим для двух треугольников в R . Таким образом, удвоенное число новых ребер графа равно удвоенному числу треугольников. Поэтому для числа E' всех ребер в R имеем равенство

$$E' = E + N,$$

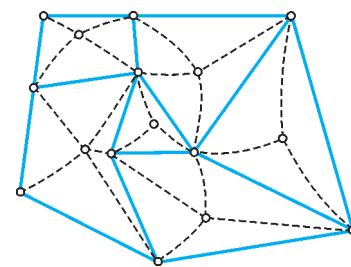


Рис. 12

где N – число треугольников в R . Используя теперь еще и полученное выше равенство $3N = 2E' - N_e$, находим

$$\begin{aligned} V + F - E &= (N_i + N_e) - (E' - N) = \\ &= N_i + N_e - (E' + N_e) = \\ &= N_i + N_e - (3N_i + 3N_e - 3)/3 = 1, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Упражнения

4. Проведите рассуждения в обратную сторону, т.е. из формулы Эйлера $V + F - E = 1$ выведите равенство $N = 2N_i + N_e - 2$.

5. Докажите формулу Эйлера независимо, т.е. не пользуясь равенством $N = 2N_i + N_e - 2$.

Проведенные исследования позволяют сформулировать такой результат:

Формулы Эйлера и Пика, как и утверждения 1° – 3°, могут быть выведены друг из друга и также могут пониматься как эквивалентные формулы.

Продумайте соответствующие цепочки утверждений самостоятельно.

Формулы Пика и Эйлера могут быть обобщены на правильные карты с «лакунами» (отверстиями), которые сами являются простыми многоугольниками (рис. 13,а).

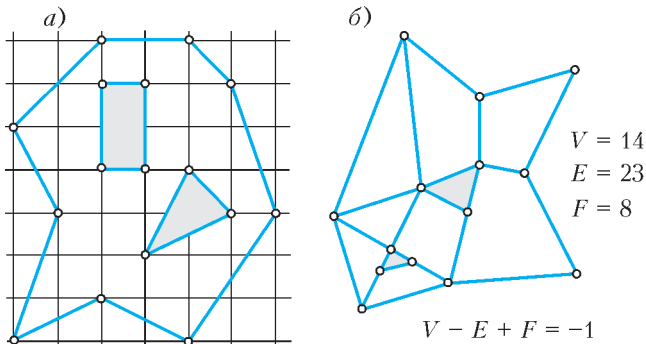


Рис. 13

Для таких многоугольников справедливы следующие результаты:

Теорема 4. Для любого простого многоугольника P с n лакунами на решетке \mathbb{Z}^2

$$[P] = N_i + N_e/2 - 1 + n,$$

где N_i – число узлов решетки, расположенных внутри P , но не на границе лакун и не внутри лакун, а N_e – число узлов решетки, которые принадлежат границе P и границам всех лакун.

Теорема 5. Для любой простой многоугольной карты с n лакунами (в прежних обозначениях)

$$V - E + F = 1 - n.$$

Пример, иллюстрирующий эту теорему приведен на рисунке 13,б.

Доказательства теорем 4 и 5 оставляем читателю в качестве полезных упражнений.

Упражнения

6 (Ю.И.Ионин). Три кузнечика (три точки) в начальный момент времени сидят в трех вершинах одной клетки, а затем начинают «играть в чехарду»: каждый может прыгнуть через одного из двух других, после чего оказывается в симметричной относительно него точке (рис. 14). В каких тройках точек

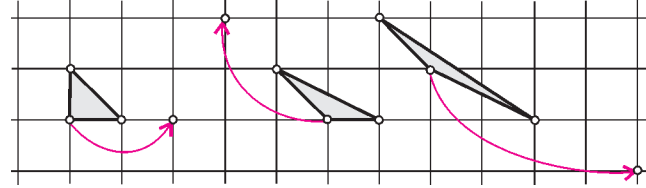


Рис. 14

(с точностью до параллельного переноса) могут через несколько прыжков оказаться кузнечики?

7. Вершины треугольника являются узлами решетки \mathbb{Z}^2 и на его сторонах нет других узлов решетки. Докажите, что если такой треугольник внутри себя содержит ровно один узел решетки, то этот узел является центром пересечения медиан данного треугольника.

8. Пусть вершины выпуклого n -угольника находятся в узлах решетки \mathbb{Z}^2 , а внутри и на его сторонах нет других узлов решетки. Докажите, что $n \leq 4$.

9. Докажите, что для любых двух узлов A и B решетки \mathbb{Z}^2 , на отрезке между которыми нет других узлов, найдется узел C такой, что треугольник ABC примитивный. Чему равно расстояние от точки C до прямой AB , если точки A и B находятся на расстоянии d ?

10 (Н.Б.Васильев). Докажите, что если решетку \mathbb{Z}^2 разбить на четыре непересекающиеся подрешетки с клетками 2×2 , то вершины любого примитивного треугольника решетки \mathbb{Z}^2 обязательно попадут в узлы трех разных указанных подрешеток.

11. На решетке \mathbb{Z}^2 отмечены $n \geq 3$ узлов так, что любые три из них образуют треугольник, медианы которого не пересекаются в узле этой решетки. Найдите наибольшее число n , при котором это возможно.

12 (Н.Б.Васильев). Шахматный король обошел доску 8×8 клеток, побывав на каждом поле ровно один раз и последним ходом вернувшись на исходное поле. Ломаная, соединяющая последовательно центры полей, которые проходил король, не имеет самопересечений. Какую площадь может ограничивать эта ломаная?

13. При любом расположении на плоскости квадрата размерами $n \times n$ он покроеет не более $(n + 1)^2$ узлов целочисленной решетки \mathbb{Z}^2 . Докажите это.

14. В каждом из случаев, представленных на рисунке 15, вычислите площадь указанного параллелограмма, если стороны параллелограмма $ABCD$ разделены на n и m равных частей, а его площадь равна 1.

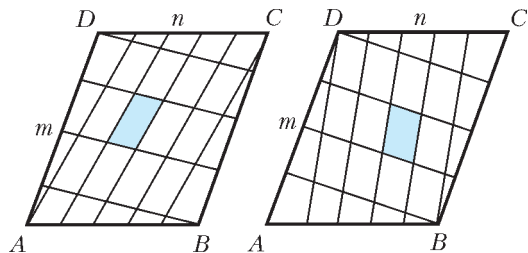


Рис. 15

роны параллелограмма $ABCD$ разделены на n и m равных частей, а его площадь равна 1.

(Продолжение см. на с. 22)